Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

**8 класс**

1. Шарик весит больше кота Матроскина на половину веса дяди Фёдора, Дядя Фёдор – столько, сколько Шарик и Матроскин вместе. Матроскин весит 10 кг. Сколько весят трое из Простоквашино вместе?

***Решение***: Пусть Дядя Фёдор весит – *х*, Шарик – *у*, Матроскин – *z*. Тогда по условию: *y – z =x/2, x= y + z.* Тогда, *y=(y+z)/2+z*, то есть *y=3z.* Значит вес троих *x+y+z=(3z+z)+3z+z=8z=80кг.*

***Критерий***: Задача решена верно данным или другим способом – 7 баллов.

1. Маляр добавляет синьку в белую краску, чтобы получить голубой оттенок. Сначала он собирался добавлять 15% синьки, но тогда голубой краски получалось недостаточно. Тогда он решил добавлять только 10% синьки. На сколько процентов увеличится количество голубой краски при том же объёме используемой синьки?

***Ответ***: на 50%

***Решение***: Содержание синьки в голубой краске снизилось в полтора раза. Значит из того же объёма синьки можно получить в полтора раза больше краски. То есть на 50% больше.

1. В шоу «Битва экстрасенсов» участвуют ведущий и много экстрасенсов. В течение первого дня испытаний каждый из экстрасенсов сделал семь предсказаний кому-нибудь (возможно себе). К вечеру оказалось, что каждому экстрасенсу сделали два предсказания, а ведущему – сто. Сколько экстрасенсов участвовало в первом дне шоу?

***Ответ***: 20.

***Решение***: пусть экстрасенсов было *х*. Тогда с одно стороны предсказаний всего было *7х*, а с другой – *2х+100.* Тогда *7х=2х+100* и *х=20.*

***Критерий***: Задача решена верно данным или другим способом – 7 баллов.

1. В треугольнике угол – прямой. На сторонах и выбраны точки и соответственно. Найдите величину угла .

***Ответ***:

***Решение***: з суммы углов треугольника поучим . Внешний угол треугольника равен . Тогда треугольник – равнобедренный и . . Тогда треугольник – равнобедренный и . Следовательно, и угол



1. Васе, в качестве домашнего задания, учитель предложил нарисовать на плоскости все пары чисел (*x,y*) удовлетворяющих уравнению

.

Он нашёл одну точку (1;0). Помогите Васе, изобразите ***все*** точки, координаты (x;y), которых удовлетворяют уравнению.

***Решение***: Преобразуем уравнение:

Тогда . Таким образом, все точки удовлетворяющие уравнению представляют собой совокупность двух прямых.

***Критерии проверки.***

• Верно проведены преобразования и верно построено множество точек – 7 баллов.

• Верно проведены преобразования, выделены два случая, но множество точек для какого-либо из них не построено или построено неверно – 4 балла.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

1. **класс**
2. На доске была написана несократимая дробь. Коля уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 3. А Толя прибавил к числителю 2, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате ребята получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

***Ответ***. 1.

***Решение***. Пусть была написана дробь . Тогда Коля получил , а Толя . Так как они получили одинаковый результат, , откуда . Значит, исходная дробь имела вид . И Коля получил из неё дробь , а Толя , т. е. результат и Коли, и Толи равен 1.

***Комментарий***.

Т.к. в условии говорится, что у Коли и у Толи полученная дробь имела

некоторое значение, проверять, что знаменатель не равен нулю, не требуется.

***Критерии проверки.***

• Верное решение — 7 баллов.

• Получено, что исходная дробь имела вид (или эквивалентный ему), но

далее выводов про итоговое значение не сделано — 3 балла.

• Решение приведено на конкретном примере (например, показано, что для

дроби условие задачи выполнено) — 2 балла.

• Приведён только верный ответ — 1 балл.

1. Произведение делимого, делителя и частного равно 120. Может ли делимое быть целым числом?

***Ответ***: Нет

***Решение***: Так как произведение делителя и частного равно делимому, то произведение делимого, делителя и частного равно квадрату делимого. То есть делимое равно – нецелое число.

1. В трапеции ABCD AC – биссектриса ∠A, ∠ACB = ∠ADC. Найдите площадь трапеции, если боковые стороны AB = 25, CD = 30.

***Ответ***: 732

***Решение***: Замети, что ∠ACB = ∠CAD как накрест лежащие. Тогда треугольники ∆ABC и ∆ACD – равнобедренные и подобные друг другу. Тогда AB = BC = 25, AC = CD = 30, и з пропорции AC/AB = AD/AC получаем AD=36. Имея все три стороны треугольника ∆ACD, легко вычислить по теореме Пифагора высоту-медиану CH = 24. Площадь S = (25+36)∙24/2=732.

1. Оля и Коля загадали по трёхзначному числу. Каждый поделил своё на произведение его цифр и получил 5. Могли ли они загадать разные числа?

***Решение***. *Первый способ*. В составе цифр, которыми записывается число, нет цифры 0, иначе не может быть выполнено условие задачи. Данное трехзначное число получено умножением на 5 произведения своих цифр, следовательно, оно делится на 5. Значит, его запись оканчивается цифрой 5. Получаем, что произведение цифр, умноженное на 5, должно делиться на 25. Заметим, что четных цифр в записи числа быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю. Таким образом, трехзначное число должно делиться на 25 и не содержать четных цифр. Таких чисел только пять: 175, 375, 575, 775 и 975. Произведение цифр искомого числа должно быть меньше 200, иначе, умноженное на 5, даст четырехзначное число. Поэтому числа 775 и 975 заведомо не подходят. Среди оставшихся трех чисел только 175 удовлетворяет условию задачи.

*Второй способ.* Заметим (аналогично первому способу решения), что последняя цифра искомого числа – 5. Пусть a, b, 5 – последовательные цифры искомого числа. По условию задачи имеем: 100a + 10b + 5 = a·b·5·5. Поделив обе части уравнения на 5, получаем: 20a + 2b + 1 = 5ab. После вычитания из обеих частей равенства 20а и вынесения за скобки общего множителя в правой части, получаем: 2b + 1 = 5a(b – 4a) (\*). Учитывая, что a и b могут принимать натуральные значения от 1 до 9, получаем, что возможные значения а – только 1 или 2. Но а=2 не удовлетворяет равенству (\*), в левой части которого нечетное число, а в правой при подстановке а=2 получается четное. Итак, единственная возможность а=1. Подставив это значение в (\*), получаем: 2b + 1 = 5b – 20, откуда b=7. Ответ: единственное искомое число – 175.

1. Постройте график уравнения , то есть изобразите на координатной плоскости все точки, координаты (х;у) которых удовлетворяют этому уравнению. ***Решение***: Преобразуем данное уравнение, выделив под знаком корня полный квадрат: . Выражение в правой части имеет смысл лишь при х = 4. Подставляя это значение в уравнение, получаем: . Разложим на множители левую часть: . Откуда y = 2 или y = –2. Значит, координаты только двух точек (4; 2) или (4; –2) удовлетворяют данному уравнению. График уравнения изображен на рисунке.



***Критерии проверки***:

• Проведены верные преобразования и рассуждения и верно построен график – 7 баллов.

• Проведены верные преобразования, но потеряно значение y = –3; в качестве графика указана одна точка – 3 балла.

• Указаны одна или две подходящие точки, возможно, с проверкой, но без иных объяснений либо после неверных преобразований – 1 балл.

• Проведены верные преобразования, но объявлено, что выражение под корнем (или в правой части после возведения в квадрат) отрицательно и графиком является пустое множество точек – 1 балл.

• Проведены рассуждения, приведшие к указанию двух точек, но эти точки как-либо соединены (например, отрезком) – 1 балл.

• Указаны без объяснений две точки, которые как-либо соединены – 0 баллов.

• В остальных случаях – 0 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

**10 класс**

1. Какое из чисел больше: ?

***Ответ***. Первое число больше.

***Решение***., поэтому .

***Критерии проверки.***

Верный ответ и доказательство – 7 баллов.

Верное рассуждение и в конце неверный ответ – 6 баллов.

Только ответ – 1 балл.

1. Маляр-счетовод решил раскрасить все натуральные числа в черный и белый цвета по следующим правилам: а) точки, разность координат которых кратна 8, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 3, 13 и 33 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 6, 16 и 66 — синим. Сколькими способами он может раскрасить все натуральные числа, соблюдая эти правила?

***Ответ***. 4 способами.

***Решение***. Из пункта а) следует, что раскраска всех натуральных чисел однозначно определяется раскраской чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Число 8=16-8 должно быть покрашено так же как 16, т.е. синим. Аналогично, число 1=33-4⋅8 должно быть покрашено красным, число 2=66-8⋅8 – синим, число 3 – красным, число 5=13-8 – красным и 6 – синим. Поэтому остается только посчитать, сколькими различными способами можно раскрасить числа 4 и 7. Так как каждое число можно раскрасить двумя способами – красным или синим – то всего способов 2⋅2=4.

Примечание. При подсчете числа способов раскрашивания точек 4 и 7, можно просто перечислить все способы, например, в виде таблицы.

***Критерии проверки***:

• Верный ответ с правильным обоснованием – 7 баллов.

• Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но получен ответ 6 или 7 – 4 балла.

• Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но подсчет числа способов отсутствует или получен ответ, отличный от указанных ранее – 3 балла.

• Ответ (в том числе правильный) без обоснования – 0 баллов.

1. Две окружности радиусом 12 см касаются в точке A. Третья окружность радиусом 1 см касается их в точках B и С. Найдите радиус окружности описанной около треугольника ABC.

***Ответ***. 2,4 см.

***Решение***: Пусть центры окружностей. Тогда точки А, В, С лежат сторонах треугольника и являются точками касания вписанной окружности, так как попарно равноудалены от смежных вершин. Стороны треугольника равны суммам радиусов – 13, 13 и 24. Радиус окружности можно найти любы из известных способов. Например, по формуле получим .

1. В прямоугольнике со сторонами 16 см ×25 см отметили произвольные 2018 точек. Всегда ли можно выбрать 6 точек так, чтобы их было можно накрыть квадратом со стороной 1 см?

***Ответ***. Да.

***Решение***. Площадь прямоугольника 400 см2. Разделим его прямыми, параллельными его сторонам, на 400 квадратов со стороной 1 (см. рис.). Если бы в каждом таком квадрате было не больше 5 отмеченных точек, то всего было бы отмечено не более 5⋅400=2000 точек, что противоречит условию. Следовательно, хотя бы водном из полученных квадратов должно быть 6 из отмеченных точек.

1. Существует ли натуральное число, кратное 2018, сумма цифр которого равна 2018?

***Ответ***. Существует.

***Решение***. Достаточно привести один пример такого числа. Покажем пару способов, как можно получать такие примеры.

Пример 2. Сумма цифр числа 2018 равна 11, сумма цифр числа 10090 = 2018 ⋅ 5 равна 10. Представим число 2018 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых кратно одиннадцати, а другое — десяти. Например, 2018 = 11⋅8 + 10⋅193. Тогда число 2018…(8 раз)…201810090…(193 раза)…10090 кратно 2018, и сумма его цифр равна 2018.

***Критерии проверки.***

• Для полного решения задачи достаточно привести пример числа и показать, что оно удовлетворяет данным требованиям, — 7 баллов.

• Приведено число без объяснений, но жюри умеет доказывать, что оно подходит, — 5 баллов.

• Если в решении есть идея «составлять» нужное число из чисел, кратных

2018, например 201810090…1009, но количество чисел посчитано неверно, — 3 балла.

• Только верный ответ — 0 баллов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике, 2018/2019 учебный год.

ОТВЕТЫ

**11 класс**

1. Приведите пример числа *x*, для которого выполняется равенство

Ответ обоснуйте.

***Ответ***. Например, .

***Решение***. Так как кратно периоду, имеем

***Критерии проверки.***

• Приведён **верный** (возможно иной) ответ, и показано, что при этом значении ***х*** равенство верно, — 7 баллов.

• Приведён только верный ответ — 3 балла.

1. Марат разбил все натуральные числа от 1 до 2000 на пары и посчитал их суммы. Могло ли оказаться так, что сумма любой пары чисел делилась на 6?

***Ответ***. Нет.

***Решение***. Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как 2000 = 333 ⋅ 6 + 2, чисел от 1 до 2000, кратных шести, ровно 333. Противоречие: 333 числа нельзя разбить на пары.

*Замечание*. Среди чисел от 1 до 2000 остаток 0 при делении на 6 дают 333 числа, остаток 1 — 334 числа, остаток 2 — 334 числа, остаток 3 — 333 числа, остаток 4 — 333 числа, остаток 5 — 333 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.

***Критерии проверки***.

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

• Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых

основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел

с какими-то другими остатками — 5 баллов.

• Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся

конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.

• Приведён только ответ — 0 баллов.

1. Участвуя в турнире игр «Пентамино», Равиль сыграл 54 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, ½ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 33 очка. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и –1 очко за поражение)?

***Ответ***. 12 очков.

***Решение***.*Первый способ.* Пусть Равиль в турнире *a* раз победил, *b* раз сыграл вничью и *c* раз проиграл. Тогда . Нужно найти значение a – c. Из второго соотношения следует, что . Тогда , откуда .

*Второй способ*. При системе подсчёта (1; ½; 0) Равиль набрал 33 очка, значит, при системе (2; 1; 0) он наберёт вдвое больше, то есть 66 очков.

При системе (1; 0; –1) Равиль теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой (2; 1; 0)). Значит, он наберёт 66 – 54 = 12 очков.

***Критерии проверки.***

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

• Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.

• Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.

• Приведён только ответ — 0 баллов.

1. На сторонах остроугольного треугольника отмечены середины . Из каждой середины проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, если площадь треугольника .

***Решение***.



1. Обозначим точки пересечения перпендикуляров — K, L, N.

Площадь искомого шестиугольника равна сумме площадей треугольника АВС и трёх маленьких треугольников, примыкающих к его сторонам: AKB, BLC, CNA.

2. Так как средние линии треугольника XYZ разбивают его на 4 равных треугольника, площадь треугольника АВС равна 2018/4.

3. Проведём в треугольнике ABC отрезки высот до точки их пересечения H. Так как средняя линия BA параллельна стороне YZ, проведённые к ним перпендикуляры СН и АN также параллельны. Рассуждая аналогично, получаем, что АН||СN, и, значит, АНСN — параллелограмм.

4. Диагональ АС разбивает параллелограмм АНСN на два равных треугольника, следовательно, площади треугольников АНС и АNС равны. Точно так же равны площади треугольников АНВ и АКВ и площади треугольников СНВ и CLВ.

5. Отсюда получаем, что искомая площадь в два раза больше площади

треугольника АВС и равна 2018/2=1009.

***Критерии проверки***.

• Любое полное верное решение — 7 баллов.

• Равенство всех нужных фигур (и площадей) доказано, но площадь не

найдена — 4 балла.

• Приведено верное разбиение шестиугольника на части, но равенство

фигур никак не обосновывается, а только утверждается, и получен верный

ответ — 3 балла.

• Ответ 1009 без обоснования — 1 балл.

1. Сколько существует натуральных чисел , для которых является квадратом целого числа?

Ответ. Два.

Решение. Пусть , причем *х* – целое число. Очевидно, что *х*≠ 0. Если *х* – отрицательно,то также равно ; поэтому дальше будем считать, что , причем *х* – натуральное. Из равенства получаем: . Тогда: . Т.к. х – натуральное число, то первый множитель слева в равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и второй множитель. Число 17 можно разложить на натуральные множители только одним способом: 17=1⋅17. При этом, т.к. х > 0, то > . Таким образом, получаем систему уравнений:

Решая систему уравнений, получаем, что .

Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями х, но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, т.к. возможен еще вариант 17=(-1)⋅(-17).

***Критерии проверки***.

• Получен верный ответ с полным обоснованием – 7 баллов.

• Не рассмотрены случаи разложения 17 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – 6 баллов.

• Верно составлена система для определения n, но не проверено, что она имеет натуральное решение – 5 баллов.

• Разумные соображения, не приведшие к решению 1-2 балла.